

Bíró Jenő

Számolási eljárások, fokozatok és analógiák a szóbeli és az írásbeli számolás tanításához

Az alsó tagozatos matematikatanításnak változatlanul alapvető feladata az alkalmazásképes szám- és műveletfogalom megalapozása, elmélyítése, a szóbeli és írásbeli számolási eljárások megtanítása, az alpműveleti számolási készségek kialakítása és fejlesztése. Az alpműveleti számolási készségek ugyanis meghatározó szerepet töltenek be mind az általános értelmi képességek fejlődésében, mind az iskolai matematika elsajátításában, tanulásában. Az alpműveleti számolási készségek fejlesztésének feltétele, hogy ismerjük az adott készség alapkészségeit, alprutinjait, azok fejlődésének jellemzőit a kialakulásuktól egészen az optimális elsajátításukig. További feltétel a számolási eljárások, a numerikus nehezítés fokozatainak, a számolási analógiák ismerete és tudatos alkalmazása az alpműveleti készségek kialakítása és fejlesztése során.

A következőkben a szám- és műveletfogalom tananyagához és fejlesztéséhez kapcsolódva kerülnek bemutatásra a szóbeli és írásbeli számolás tanításakor alkalmazható számolási eljárások, fokozatok és analógiák. A tananyag egy lehetséges elrendezését, felépítését táblázatos formában mutatjuk be, majd a számolási eljárások, fokozatok és analógiák ismertetésére kerül sor.

A számfogalom és alpműveletek a húszas számkörben

A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
<p>1. <i>A természetes számok a húszas számkörben</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A természetes szám fogalmának megalapozása 0-tól 20-ig sokféle tevékenységgel, szemléltetéssel, tartalmi megközelítéssel. A természetes számok darabszám szerinti megadása 20-ig. Párosítások; tárgyak meg- és leszámlálása. – A természetes szám, mint véges halmaz számossága, mint sorszám, mint mérőszám, mint műveleti eredmény <p>2. <i>A számok tulajdonságai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A számjelek megismerése, számok írása, olvasása. – A számok bontott, összeg és különbség alakjai valóságos tevékenységhez, szétválogatáshoz kapcsolva. – Páros és páratlan számok. A számjegyek száma. Egy- és kétjegyű szám. <p>3. <i>A számok kapcsolatai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Számok összehasonlítása, rendezése, számszomszédok. A számok helye különböző beosztású számegyeneseken. – A viszonyításhoz szükséges jelek bevezetése. <p>4. <i>Összeadás, kivonás</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – Az összeadás és kivonás különböző értelmezései, párhuzamos értelmezés. – Kiszámlálás: halmazból megadott számú elem elvétele. – Hozzászámlálás: megadott elemszámú halmaz elemszámának növelése megadott elemszámú halmazzá. – Elvétel: megnevezett elemszámú halmaz elemszámának csökkentése meghatározott elemszámig. – Bontás: Halmaz részhalmazokra bontása. – Csoportosítások. – Két diszjunkt halmaz egyesítése. – Műveleti tulajdonságok. – Az összeadás és a kivonás kapcsolata. 	<ul style="list-style-type: none"> – A számok különböző értelmezéseinek elmélyítése. – Gyorsolvasási gyakorlatok képen megjelenített számok leolvasására. – A számegyenes alkalmazása a számfogalom elmélyítésére. – A számok bontott alakjainak megtanulása. – A húszas számkörben tanultak alkalmazása más témakörökben. – A számok közötti függvénykapcsolatok. <ul style="list-style-type: none"> – Az összeg-és különbségalakok megtanulása, memorizálása. – Műveletek a szöveges feladatokban. – Nyitott mondatok kiegészítése konkrét alaphalmaz elemeivel. – Vásárlások eljátszása

Műveletek, fokozatok

1. A műveleteket először a konkrét tárgykból álló halmazok számosságával, a darabszámmal taníthatjuk, vagyis manipulatív számolással. A táblázatban szereplő kiszámlálás, hozzászámlálás, elvétel, bontás, csoportosítás az összeadás és a kivonás műveletfogalmának a megalapozását is szolgálják.

2. Műveletek mennyiségek mérőszámaival.

a. Műveletek az ötös számkörben:

- három,- négy- és ötelemű halmazok bontása,
- halmazok egyesítése,
- összeadás az ötös számkörben, az összeg kiszámítása, a tagok felcserélése,
- kivonás az ötös számkörben,
- az összeadás és a kivonás kapcsolata,
- pótlás az ötös számkörben,
- nyitott mondatok az ötös számkörben.

b. Műveletek a 6-tól 10-ig terjedő számkörben:

- hat,- hét, - nyolc, - kilencelemű halmazok bontása,
- a tíz és a tízes fogalma,
- összeadás a tízes számkörben, az összeg kiszámítása, a tagok felcserélése,
- kivonás a tízes számkörben,
- az összeadás és a kivonás kapcsolata,
- pótlás a tízes számkörben,
- nyitott mondatok a tízes számkörben,
- a tíz bontása,
- pótlás tízre.

c. Műveletek a 10-től 20-ig terjedő számkörben:

- a kétjegyű szám fogalma,
- a kétjegyű számok helyi érték szerinti értelmezése, bontása, írása, olvasása,
- a kétjegyű számok bontása 10 és egyesek összegére,
- a kétjegyű számokhoz egyjegyű számok hozzáadása 10 átlépése nélkül,

$$3 + 4 =$$

$$13 + 4 =$$

- a kétjegyű számokból egyjegyű szám elvétele a 10 átlépése nélkül,

$$8 - 5 =$$

$$18 - 5 =$$

- a háromtagú összeadások, kivonások a 10 átlépésének előkészítésére,

$$3 + 7 + 6 =$$

$$15 - 5 - 2 =$$

- a 10 átlépésére vezető összeadások,

$$9 + 2 =$$

$$9 + 3 =$$

$$9 + 6 =$$

$$8 + 3 =$$

$$8 + 4 =$$

$$8 + 5 =$$

- kétjegyű szám egyeseinek elvétele,

$$19 - 9 =$$

$$12 - 2 =$$

$$18 - 8 =$$

$$13 - 3 =$$

$$14 - 4 =$$

$$17 - 7 =$$

- a 10 átlépésére vezető kivonások,

$$11 - 2 =$$

$$11 - 3 =$$

$$11 - 6 =$$

$$12 - 3 =$$

$$12 - 4 =$$

$$12 - 5 =$$

- a tíz átlépésére vezető pótlások,

$$9 + \Delta = 11$$

$$8 + \Delta = 11$$

$$7 + \Delta = 11$$

$$9 + \Delta = 16$$

$$7 + \Delta = 13$$

$$8 + \Delta = 15$$

- a tíz átlépésére vezető bontások,

$$13 = 5 + \Delta$$

$$13 = 7 + \Delta$$

$$14 = 8 + \Delta$$

$$14 = 5 + \Delta$$

$$15 = 7 + \Delta$$

$$15 = 8 + \Delta$$

A számfogalom és alpműveletek a százaz számkörben

A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
-----------------------	-----------------------

<p>1. <i>A számok értelmezése a száz-as számkörben</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A természetes számok darabszám szerinti értelmezése 100-ig (tárgyak meg-és leszámblása egyesével, kettesével, ötösével, tízesével) - A természetes számok értelmezése mennyiségek mérőszámaként 100-ig. - A számok értelmezése sorszámként. - A kétjegyű szám, mint egy kerek tízes és egy egyjegyű szám összege <p>2. <i>A számok tulajdonságai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A számok összeg, különbség, szorzat és hányados alakjai. - Az alaki érték, helyi érték, tényleges érték. <p>4. <i>A számok kapcsolatai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A páros, páratlan szám fogalmának általánosítása, elmélyítése - Oszthatósági vizsgálatok a soralkotás és a szorzótábla közvetlen alkalmazásával. - A számok nagyságának vizsgálata: viszonyítás egy számhoz, rendezés, egyes, tízes, páros és páratlan számszomszédok, számok helye a számegyenesen. <p>4. <i>Alapműveletek a száz-as számkörben</i></p> <p>a. <i>Az összeadás és kivonás:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A műveletek értelmezései darabszámmal és mérőszámmal. - A műveletek tulajdonságai, számolási eljárások. <p>b. <i>A szorzás, bennfoglalás és részekre osztás</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - A szorzás értelmezése: egyenlő tagok összeadása darabszámmal, mennyiségekkel, számegyenesen való lépegetéssel. A szorzás tényezői felcserélhetőségének, a szorzótáblák közötti kapcsolatoknak. - Az osztás értelmezése: az osztás, mint a szorzás fordított művelete, az osztás, mint bennfoglalás, mint részekre osztás. - A maradékos osztás 	<ul style="list-style-type: none"> - A számok különböző értelmezéseinek elmélyítése, rögzítése. - A száz-as számkörben tanultak alkalmazása más témakörökben. Kombinatorikus gondolkodást fejlesztő számképzési feladatok. - A számok közötti függvénykapcsolatok <ul style="list-style-type: none"> - A műveletek különböző értelmezéseinek elmélyítése. - Szabályjátékok, statisztikai vizsgálatok. - Óraszámtnan. - Szorzótábla vizsgálata. - Felcsavart számegyenes. - „Kisegyszeregy” - A számolási készséget fejlesztő feladatok.
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Műveletek, fokozatok

1. Összeadás, kivonás száz-as számkörben

- Kerek tízesek összeadása, kivonása
 - 1 + 8 ? 10 + 80
 - 3 + 4 ? 30 + 40
 - 7 - 3 ? 70 - 30
 - 9 - 5 ? 90 - 50
- Kétjegyű számokhoz egyjegyű számok hozzáadása tízes átlépése nélkül
 - 3 + 2 =
 - 13 + 2 =
 - 23 + 2 =
 - 43 + 2 =
- Kétjegyű számokhoz egyjegyű számok hozzáadása tízes átlépésével
 - 7 + 4 =

- $17 + 4 =$
 $27 + 4 =$
 $47 + 4 =$
- Kétjegyű számokból egyjegyű számok elvétele tízes átlépése nélkül

$8 - 3 =$
 $18 - 3 =$
 $28 - 3 =$
 $68 - 3 =$
 - Kétjegyű számokból egyjegyű számok elvétele tízes átlépésével

$11 - 2 =$
 $21 - 2 =$
 $31 - 2 =$
 $81 - 2 =$
 - Teljes kétjegyű számokhoz(ból) kerek tízesek hozzáadása, illetve elvétele

$26 + 10 =$ $26 + 10 =$
 $26 + 20 =$ vagy $39 + 10 =$
 $26 + 30 =$ $57 + 10 =$
 $26 + 40 =$ $87 + 10 =$

$68 - 10 =$ $24 - 10 =$
 $68 - 20 =$ vagy $49 - 10 =$
 $68 - 30 =$ $57 - 10 =$
 $68 - 40 =$ $76 - 10 =$
 - Teljes kétjegyű számokhoz(ból) teljes kétjegyű számok hozzáadása, elvétele tízes átlépés nélkül

10 és 20 közötti számok hozzáadása, elvétele	20 és 30 közötti számok hozzáadása, elvétele	30 és 40 közötti számok hozzáadása, elvétele	40-nél nagyobb számok hozzáadása, elvétele
$32 + 15 =$	$33 + 25 =$	$42 + 35 =$	$34 + 65 =$
$63 + 17 =$	$56 + 22 =$	$63 + 34 =$	$22 + 76 =$
$58 - 13 =$	$78 - 26 =$	$59 - 33 =$	$86 - 54 =$
$87 - 14 =$	$89 - 23 =$	$96 - 32 =$	$57 - 43 =$

A feladatok megoldása a második tag helyi érték szerinti bontásával.

$$32 + 15 \quad \boxed{?} \quad 32 + 10 + 5$$

$$58 - 13 \quad \boxed{?} \quad 58 - 10 - 3$$

- Teljes kétjegyű számokhoz teljes kétjegyű számok hozzáadása, elvétele tízes átlépéssel

10 és 20 közötti számok hozzáadása, elvétele	20 és 30 közötti számok hozzáadása, elvétele	30 és 40 közötti számok hozzáadása, elvétele	40-nél nagyobb számok hozzáadása, elvétele
----------------------------------------------	----------------------------------------------	----------------------------------------------	--------------------------------------------

$$\begin{array}{cccc}
 34 + 18 = & 43 + 29 = & 32 + 39 = & 34 + 57 = \\
 65 + 17 = & 76 + 25 = & 54 + 38 = & 22 + 79 = \\
 56 - 19 = & 48 - 29 = & 65 - 36 = & 96 - 58 = \\
 81 - 16 = & 61 - 22 = & 86 - 37 = & 62 - 23 =
 \end{array}$$

2. Kétjegyű számok szorzása egyjegyű szorzóval

- Kerek tízesek szorzása
 $20 \cdot 3 = 2 \text{ tízes} \cdot 3 = 6 \text{ tízes} = 60$
- Teljes kétjegyű szám szorzása egyjegyű számmal
 $19 \cdot 3 = (10+9) \cdot 3 = 10 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 30 + 27 = 57$ $19 \cdot 3 = (20-1) \cdot 3 = 20 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 60 - 3 = 57$
- Szorzás 0-val, 1-gyel, 10-zel
- Nyitott mondatok
 $5 \cdot 9 + \Delta = 48$ $5 \cdot 9 + \Delta < 48$
- Műveleti tulajdonságok: felcserélhetőség, csoportosíthatóság, széttagolhatóság (disztributivitás)

3. Kétjegyű számok osztása egyjegyű osztóval- a maradék nulla

- Kerek tízesek osztása maradék nélkül, a hányados kerek szám
 $60 : 3 = 6 \text{ tízes} : 3 = 2 \text{ tízes} = 20$
- Az osztandó kétjegyű, a hányados egyjegyű szám (a tízesek az egyesekkel együtt oszthatók)
 $24 : 4 = 6$
- A tízesek és az egyesek is oszthatók az osztandóval
 $63 : 3 = (60+3) : 3 = 60 : 3 + 3 : 3 = 20 + 1 = 21$
- A tízesek maradéka egyesekre váltva osztható –egyetlen tízest kell beváltani
 $42 : 3 = (30+12) : 3 = 30 : 3 + 12 : 3 = 10 + 4 = 14$
- A tízesek maradéka egyesekre váltva osztható –több tízest kell beváltani
 $72 : 4 = (40+32) : 4 = 40 : 4 + 32 : 4 = 10 + 8 = 18$

4. Kétjegyű számok maradékos osztása egyjegyű osztóval

- Maradékos bennfoglaló osztás - a hányados egyjegyű szám
 $15 : 2 =$ $36 : 5 =$
- Maradékos bennfoglaló osztás - a hányados kétjegyű szám
 $23 : 2 =$ $56 : 5 =$

A számfogalom és alpműveletek az ezres számkörben

A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
-----------------------	-----------------------

<p>1. <i>A számok értelmezése az ezres számkörben</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A természetes számok darabszám szerinti értelmezése 1000-ig (tárgyak meg-és leszámllása egyesével, kettesével, ötösével, tízesével) – A természetes számok értelmezése mennyiségek mérőszámaként 1000-ig. – A számok értelmezése sorszámként. <p>2. <i>A számok tulajdonságai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A számok összeg, különbség, szorzat és hányados alakjai. – Az alaki érték, helyi érték, tényleges érték. – A számok kerekített értékei.. – Számok jellemzése tulajdonságaikkal: párosság, oszthatóság, számjegyek száma stb. <p>3. <i>A számok kapcsolatai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A számok nagyságának vizsgálata: viszonyítás egy számhoz, rendezés, egyes, tízes, páros és páratlan számszomszédok, számok helye a számegyenesen. <p>4. <i>Alapműveletek az ezres számkörben</i></p> <p>a. <i>Az összeadás és kivonás:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A műveletek többféle értelmezésének felújítása. – A műveletek tulajdonságai, számolási eljárások – Írásbeli összeadás és kivonás algoritmusai. – Az összeg és a különbség változásai. 	<ul style="list-style-type: none"> – A számok különböző értelmezéseinek elmélyítése, rögzítése. – A százas számkörben tanult alkalmazása más témakörökben. Kombinatorikus gondolkodást fejlesztő számképzési feladatok. – A számok közötti függvénykapcsolatok – Számtáblázatok vizsgálata. – Számkitalalós játékok számkártyákkal, számalkotások adott tulajdonsághoz. <ul style="list-style-type: none"> – A műveletek különböző értelmezéseinek elmélyítése. – Szabályjátékok, statisztikai vizsgálatok. – Óraszámant. – Szorzótábla vizsgálata. – A számolási készséget fejlesztő feladatok. – Műveletek szöveges feladatokban.
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
<p>b. <i>Szorzás, osztás</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A szorzás értelmezései – Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal. – Műveleti tulajdonságok, számolási eljárások. – Írásbeli szorzás egyjegyű számmal. – Az osztás értelmezései. – Osztás egyjegyű számmal. – A szorzat és a hányados változásai és változatlansága. – Műveleti összefüggések. 	<ul style="list-style-type: none"> – Bűvös négyzetek. – Vásárlások.

Műveletek, fokozatok

1. Szóbeli összeadás, kivonás ezres számkörben

- Kerek százasok összeadása, kivonása

$$2 + 7 \quad \boxed{?} \quad 20 + 70 \quad \boxed{?} \quad 200 + 700$$

$$3 + 5 \quad \boxed{?} \quad 30 + 50 \quad \boxed{?} \quad 300 + 500$$

$$7 - 4 \quad \boxed{?} \quad 70 - 40 \quad \boxed{?} \quad 700 - 400$$

$$9 - 6 \quad \boxed{?} \quad 90 - 60 \quad \boxed{?} \quad 900 - 600$$

- Háromjegyű számokhoz kerek tízesek hozzáadása, illetve elvétele

$$360 + 10 = \quad 360 + 10 =$$

$$360 + 20 = \text{vagy} \quad 390 + 10 =$$

$$360 + 30 = \quad 670 + 10 =$$

$$360 + 40 = \quad 870 + 10 =$$

$$590 - 10 = \quad 340 - 10 =$$

$$590 - 20 = \text{ vagy } 690 - 10 =$$

$$590 - 30 = \quad 870 - 10 =$$

$$590 - 40 = \quad 940 - 10 =$$

Analógiák

$$2 + 7 \quad \boxed{?} \quad 32 + 7 \quad \boxed{?} \quad 320 + 70$$

$$3 + 5 \quad \boxed{?} \quad 43 + 5 \quad \boxed{?} \quad 430 + 50$$

$$7 - 4 \quad \boxed{?} \quad 67 - 4 \quad \boxed{?} \quad 670 - 40$$

$$9 - 6 \quad \boxed{?} \quad 89 - 6 \quad \boxed{?} \quad 890 - 60$$

- Teljes háromjegyű számok összeadása, kivonása

$$23 + 36 \quad \boxed{?} \quad 230 + 360$$

$$23 + 36 \quad \boxed{?} \quad 232 + 365$$

$$57 - 34 \quad \boxed{?} \quad 570 - 340$$

$$57 - 34 \quad \boxed{?} \quad 576 - 342$$

2. Szóbeli szorzás ezres számkörben

- Kerek százások szorzása egyjegyű számmal
 $200 \cdot 3 = 2 \text{ százás} \cdot 3 = 6 \text{ százás} = 600$
- Tízzel osztható számok szorzása egyjegyű számmal
 $240 \cdot 3 = (200 + 40) \cdot 3 = 200 \cdot 3 + 40 \cdot 3$
 vagy
 $240 \cdot 3 = 24 \text{ tízes} \cdot 3 = 72 \text{ tízes}$
- Teljes háromjegyű szám szorzása egyjegyű számmal
 $128 \cdot 3 = (100 + 20 + 8) \cdot 3 = 100 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 300 + 60 + 24$
- Szorzás 10-zel, 100-zal
- Nyitott mondatok
 $40 \cdot 9 + \Delta = 410$
 $40 \cdot 9 + \Delta < 410$
- Analógiák

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 3 \cdot 6 & \downarrow & 26 \cdot 3 = (20+6) \cdot 3 \\ & 3 \cdot 60 & & 260 \cdot 3 = (200+60) \cdot 3 \end{array}$$

3. Szóbeli osztás ezres számkörben

- Kerek százások osztása maradék nélkül, a hányados kerek szám
 $600 : 3 = 6 \text{ százás} : 3 = 2 \text{ százás} = 200$ vagy
 $6 : 3 \quad \boxed{?} \quad 60 : 3 \quad \boxed{?} \quad 600 : 3$
- A százások a tízesekkel együtt oszthatók
 $240 : 4 = 60$ vagy,

$$24: 4 \quad \boxed{?} \quad 240: 4$$

- A százások és tízesek is oszthatók az osztandóval
 $630: 3=(600+30): 3= 600: 3+30: 3=200+10=210$
- A százások maradéka tízesekre váltva osztható –egyetlen százast kell beváltani
 $420: 3=(300+120): 3=300: 3+120: 3=100+40=140$
- A százások maradéka tízesekre váltva osztható –több százast kell beváltani
 $720: 4=(400+320): 4=400: 4+320: 4=100+80=180$
- Háromjegyű számok osztása kerek tízesekkel maradék nélkül

$$36: 9 \quad \boxed{?} \quad 360: 90$$

- Háromjegyű számok maradékos osztása kerek tízesekkel
 $183: 20=$
- Osztás 10-zel, 100-zal

4. Írásbeli összeadás ezres számkörben

- Az egyesek, a tízesek és a százások alaki értékének összege tíznél kisebb

$$\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 2 \\ + 4 \ 1 \ 7 \\ \hline 7 \ 6 \ 9 \end{array}$$

- Az egyesek vagy tízesek alaki értékének összege 9-nél nagyobb

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 4 \\ + 1 \ 2 \ 7 \\ \hline 5 \ 8 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \ 5 \ 6 \\ + 2 \ 8 \ 3 \\ \hline 7 \ 3 \ 9 \end{array}$$

- Az egyesek és a tízesek alaki értékének összege 9-nél nagyobb

$$\begin{array}{r} 6 \ 2 \ 7 \\ + 2 \ 9 \ 6 \\ \hline 9 \ 2 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \ 3 \ 8 \\ + 3 \ 7 \ 2 \\ \hline 8 \ 1 \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \ 7 \ 6 \\ + 3 \ 5 \ 4 \\ \hline 6 \ 3 \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \ 5 \ 4 \\ + 4 \ 5 \ 8 \\ \hline 1 \ 2 \end{array}$$

- Az egyesek, a tízesek és a százások alaki értékének összege 9-nél nagyobb

$$\begin{array}{r} 8 \ 5 \ 7 \\ + 4 \ 9 \ 6 \\ \hline 1 \ 2 \ 5 \ 3 \end{array}$$

- Az egyesek vagy a tízesek alaki értéke 0

$$\begin{array}{r} 6 \ 3 \ 0 \\ + 2 \ 4 \ 6 \\ \hline 8 \ 7 \ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \ 0 \ 9 \\ + 3 \ 7 \ 2 \\ \hline 5 \ 8 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \ 5 \ 7 \\ + 3 \ 0 \ 5 \\ \hline 7 \ 6 \ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \ 3 \ 0 \\ + 2 \ 0 \ 7 \\ \hline 8 \ 3 \ 7 \end{array}$$

- Műveleti tulajdonságok: felcserélhetőség, csoportosíthatóság

- Hiányos műveletek

$$2 \ 6 \ 3 \quad \cdot \cdot \cdot \quad 2 \cdot 3 \quad \cdot \ 6 \cdot$$

$$\begin{array}{r} + \cdot \cdot \cdot \\ \hline 7 \ 2 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \ 4 \ 5 \ 8 \\ \hline 7 \ 2 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \ 4 \ 5 \cdot \\ \hline 7 \ 2 \ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \ 4 \cdot \ 8 \\ \hline 7 \ 2 \ 1 \end{array}$$

- Több tag összeadása

5. Írásbeli kivonás ezres számkörben

- A kisebbítendő minden számjegyének alaki értéke nagyobb, mint a kivonandó azonos helyi értékű számjegyének

$$\begin{array}{r} 7 \ 8 \ 5 \\ - 4 \ 6 \ 2 \\ \hline 3 \ 2 \ 3 \end{array}$$

- A kisebbítendő egyesének az alaki értéke kisebb, mint a kivonandó egyesének

$$\begin{array}{r} 6 \ 8 \ 3 \\ - 3 \ 5 \ 9 \\ \hline 3 \ 2 \ 4 \end{array}$$

- A kisebbítendő tízesének az alaki értéke kisebb, mint a kivonandó tízesének

$$\begin{array}{r} 9 \ 3 \ 7 \\ - 5 \ 8 \ 5 \\ \hline 3 \ 5 \ 2 \end{array}$$

- A kisebbítendő tízesének és egyesének az alaki értéke kisebb, mint a kivonandó tízesének és egyesének

$$\begin{array}{r} 8 \ 2 \ 3 \\ - 5 \ 7 \ 5 \\ \hline 2 \ 4 \ 8 \end{array}$$

- A kisebbítendőben és a kivonandóban az egyesek és tízesek helyén 0 és 1 szerepel

$$\begin{array}{r} 6 \ 7 \ 9 \\ - 4 \ 8 \ 0 \\ \hline 1 \ 9 \ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \ 4 \ 5 \\ - 3 \ 0 \ 7 \\ \hline 5 \ 3 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \ 4 \ 0 \\ - 2 \ 5 \ 3 \\ \hline 4 \ 8 \ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \ 9 \ 0 \\ - 5 \ 4 \ 1 \\ \hline 3 \ 4 \ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \ 0 \ 8 \\ - 2 \ 1 \ 5 \\ \hline 2 \ 9 \ 3 \end{array}$$

- A különbség változása, illetve változatlansága
- Hiányos írásbeli kivonások

$$\begin{array}{r} 5 \ 3 \ 4 \\ - \cdot \cdot \cdot \\ \hline 1 \ 6 \ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \\ - 3 \ 6 \ 9 \\ \hline 1 \ 6 \ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \ 3 \cdot \\ - 3 \cdot \ 9 \\ \hline \cdot \ 6 \ 5 \end{array}$$

6. Írásbeli szorzás ezres számkörben

sz	t	e
3	1	2
		6
	3	0
+9	0	0
9	3	6

Algoritmus:

- becslés,
- a szorzandó beírása a helyi érték táblázatba,
- részletszorzatok lejegyzése,
- részletszorzatok összeadása,
- ellenőrzés

- A szorzandó minden számjegye alaki értékének és a szorzó szorzata kisebb tíznél. (Lásd az előző példát)
- Az egyesek alaki értékének és a szorzó szorzata kétjegyű szám

sz	t	e
2	1	4
	1	2
	3	0
+6	0	0
6	4	2

- A tízesek alaki értékének és a szorzó szorzata kétjegyű szám

sz	t	e
2	8	3
		6
1	6	0
+4	0	0
5	6	6

- Az egyesek, a tízesek alaki értékének és a szorzó szorzata kétjegyű szám

sz	t	e
2	7	9
	2	7
2	1	0
+6	0	0
8	3	7

- A szorzandóban nulla szerepel

sz	t	e

2	0	3	•	4
	1	2		
	0	0		
8	0	0		
8	1	2		

7. Osztás egyjegyű számmal ezres számkörben

sz	t	e
6'	9'	3'
6		
0	9	
-	9	
	0	3
	-	3
		0

sz	t	e
2	3	1

Algoritmus:

- a hányados becslése,
- a hányados számjegyei számának meghatározása és a számjegyek helyének kipontozása,
- az osztandó számjegyének vagy számjegyeinek jelölése vesszővel,
- a hányados első számjegyének megállapítása,
- visszaszorzás, az eredmény összehasonlítása az osztandóval,
- kivonás, a maradék megállapítása és leírása a megfelelő helyi értékű számjegy alá,
- a maradék összehasonlítása az osztóval,
- az osztandó soron következő számjegyének jelölése,
- ellenőrzés.

- Az osztandó minden számjegyének az alaki értéke többszöröse az osztónak (Lásd az előző példát)
- Az osztandó többszöröse az osztónak, de a százasként alaki értéke nem többszöröse annak - kisebb az osztónál

sz	t	e
7	2'	8'
7	2	
0	0	8
		8
		0

sz	t	e
	9	1

- Az osztandó többszöröse az osztónak, de a százasként alaki értéke nem többszöröse annak

sz	t	e
9'	2'	8'
9		
1	2	
1	2	

sz	t	e
2	3	2

	0	8
		8
		0

- Az osztandó többszöröse az osztónak, de a tízes alaki értéke nem többszöröse annak

sz	t	e
6'	7'	2'
6		
0	7	
	6	
	1	2
	1	2
		0

$$: 6 =$$

sz	t	e
1	1	2

- Az osztandó többszöröse az osztónak, de a százask és a tízes alaki értéke nem többszöröse annak (a százások és a tízesek osztási maradéka nem nulla)

sz	t	e
9'	8'	5'
5		
4	7	
4	5	
	2	5
	2	5
		0

$$: 5 =$$

sz	t	e
1	9	5

- Az osztandó többszöröse az osztónak és nulla szerepel a hányadosban

sz	t	e
6'	2'	4'
6		
0	2	
	0	
	2	4
	2	4
		0

$$: 3 =$$

sz	t	e
2	0	8

- Maradékos osztás

sz	t	e
8'	9'	6'
6		
2	9	
2	7	
	2	6
	2	4
		2

$$:3 =$$

sz	t	e
2	9	8

- Nulla szerepel az osztandóban

sz	t	e
8'	0'	4'
6		
2	0	
1	8	
	2	4
	2	4
		0

$$:6 =$$

sz	t	e
1	3	6

A számfogalom és alpműveletek az tízezres számkörben

A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
-----------------------	-----------------------

<p>1. <i>A számok értelmezése tízezres számkörben</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A természetes számok darabszám szerinti értelmezése 10000-ig (tárgyak meg-és leszámlálása egyesével, kettesével, ötösével, tízesével) – A természetes számok értelmezése mennyiségek mérőszámaként 10 000-ig. – A számok értelmezése sorszámként. <p>2. <i>A számok tulajdonságai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A számok összeg, különbség, szorzat és hányados alakjai. – A tízes számrendszer. Az alaki érték, helyi érték, tényleges érték. – A számok kerekített értékei.. – Számok jellemzése tulajdonságaikkal: párosság, oszthatóság, számjegyek száma stb. <p>3. <i>A számok kapcsolatai</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A számok nagyságának vizsgálata: viszonyítás egy számhoz, rendezés, egyes, tízes, páros és páratlan számszomszédok, számok helye a számegyenesen. <p>4. <i>Alapműveletek az ezres számkörben</i></p> <p>a. <i>Az összeadás és kivonás:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A műveletek többféle értelmezésének felújítása. – A műveletek tulajdonságai, számolási eljárások – Írásbeli összeadás és kivonás teljes négyjegyű számokkal, ellenőrzés számológéppel. – Az összeg és a különbség változásai. – Az ezres számkörben tanult algoritmusok kiterjesztése tízezres számkörre. 	<ul style="list-style-type: none"> – A számok különböző értelmezéseinek elmélyítése, rögzítése. – A százás számkörben tanult alkalmazása más témakörökben. Kombinatorikus gondolkodást fejlesztő számképzési feladatok. – A számok közötti függvénykapcsolatok <ul style="list-style-type: none"> – Szám táblázatok vizsgálata. – Sorozatok vizsgálata. – Állítások logikai értékének eldöntése. – Kerekítés gyakorlása valóságos problémákhoz kapcsolva. – A műveletek különböző értelmezéseinek elmélyítése. – Szabályjátékok, statisztikai vizsgálatok. – Óraszám tan. – Szorzótábla vizsgálata. – A számolási készséget fejlesztő feladatok. – Műveletek szöveges feladatokban.
A tananyag felépítése	Gyakorlás, alkalmazás
<p>b. <i>Szorzás, osztás</i></p> <ul style="list-style-type: none"> – A szorzás értelmezései. – Szóbeli szorzás, osztás. – Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel. – Műveleti tulajdonságok, számolási eljárások. – Írásbeli szorzás egyjegyű számmal tízezres számkörben. – A két-és többjegyű számmal való szorzás algoritmusai. – Az osztás értelmezései. – Osztás egy- és kétjegyű számmal. – A szorzat és a hányados változásai és változatlansága. – Műveleti összefüggések. 	<ul style="list-style-type: none"> – Bűvös négyzetek. – Vásárlások.

Műveletek, fokozatok

Az ezres számkörnél ismertett analógiákat és műveleti algoritmusokat kiterjesztjük a tízezres számkörre.

1. Szorzás kétjegyű számmal

A kétjegyűszámokkal való szorzást a szóbeli szorzásra alapozva tanítjuk. A szóban végzett számításokat az írásbeli forma szerint lejegyezzük, majd abból a felesleges részeket elhagyjuk, amint ezt a következő példa mutatja.

3	2	•	1	2				
3	2	•	1	0	=	3	2	0
3	2	•		2	=		6	4
						3	8	4

?

sz	t	e		t	e
	3	2	•	1	2
3	2	0			
	6	4			
3	8	4			

- A számjegyek alaki értékének a szorzata kisebb tíznél
 $23 \cdot 32$ $342 \cdot 23$
- A szorzandó és a szorzó egyese alaki értékének szorzata nagyobb tíznél
 $23 \cdot 34$ $234 \cdot 23$
- A szorzandó egyese és a szorzó tíze alaki értékének szorzata nagyobb tíznél
 $24 \cdot 32$ $324 \cdot 32$
- A szorzandó egyese és a szorzó alaki értékének szorzatai nagyobbak tíznél
 $24 \cdot 43$ $214 \cdot 34$
- A szorzandó tíze és a szorzó alaki értékének szorzatai nagyobbak tíznél
 $42 \cdot 34$ $241 \cdot 43$
- A szorzandó és a szorzó alaki értékének szorzatai nagyobbak tíznél
 $46 \cdot 37$ $689 \cdot 35$
- A szorzóban nulla szerepel
 $52 \cdot 70$ $367 \cdot 80$
- Egyszerűsítési eljárások

A tízesek helyén 1 áll

Az egyesek helyén 1 áll

$$\begin{array}{r} 68 \cdot 17 \\ 476 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \cdot 81 \\ 584 \\ \hline 5913 \end{array}$$

2. Osztás kétjegyű számmal

- Előkészítés: osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel; három- és négyjegyű számok osztása kerek tízesekkel.
- Háromjegyű számok osztása kétjegyű számmal
A háromjegyű számok kétjegyű számmal való osztásának algoritmusát részletesen is ismertetjük. A műveltség tanítását kerek tízesekhez közeli osztóval célszerű kezdeni.

$$86 : 21 = \dots$$

A hányados becslése. A hányados számjegyei számának megállapítása, jelölése

Az osztandó első két jegyéből képzett szám nagyobb, mint az osztó, így a hányados első számjegyét az osztandó első két számjegyéből kell meghatározni.

86 tízest kell osztani, ezért tízeseket kapunk eredményül. A hányados kétjegyű lesz. *A hányados helyét kipontozzuk, s az osztandó tízes helyi értékű számjegyét vonással megjelöljük.*

$$86 : 21 = 4 \dots$$

A hányados első számjegyének meghatározása

A hányados első számjegyét becsléssel állapítjuk meg. Elsőként kerekítjük az osztót tízesre: 21 helyett a kerekített értékét, a 20-at vehetjük. Így a becslést visszavezetjük a szorzótábla keretei közé:

$$86 \text{ tízes} : 2 \text{ tízes} = 8 : 2 = 4$$

A 4-et leírjuk a hányados tízes helyi értékű helyére.

$$\begin{array}{r} 86'1 : 21 = 4 . \\ 84 \end{array}$$

Visszaszorzás, az eredmény összehasonlítása az osztandóval

A visszaszorzást (ellenőrző szorzást) 21-el, a pontos osztóval úgy végezzük el, mint írásbeli szorzásnál, tehát az egyeseket, majd a tízeseket szorozzuk.

A szorzatot összehasonlítjuk az osztandóval. (Ha nagyobb, akkor a hányados számjegyét rosszul becsültük, ezért új számjegyet kell keresnünk.)

A szorzatot a helyi értékének megfelelően az osztandó alá írjuk.

$$\begin{array}{r} 86'1 : 21 = 4 . \\ 84 \\ \underline{\quad} \\ 2 \end{array}$$

Kivonás, a maradék megállapítása és leírása a megfelelő helyi értékű számjegy alá.

A kivonás eredményeként adódó maradékot összehasonlítjuk az osztóval. Ha a maradék nagyobb, akkor hányados számjegyét rosszul becsültük, ezért új számjegyet kell keresnünk.)

$$\begin{array}{r} 86'1' : 21 = 4 . \\ 84 \\ \underline{\quad} \\ 21 \end{array}$$

Az osztandó soron következő számjegyének jelölése vonással, és lejegyzése a maradék mellé.

$$\begin{array}{r} 86'1' : 21 = 41 \\ 84 \\ \underline{\quad} \\ 21 \end{array}$$

A hányados soron következő számjegyének megállapítása, lejegyzése. és a vissza (ellenőrző) szorzás elvégzése.

$$\begin{array}{r} 86'1' : 21 = 41 \\ 84 \\ \underline{\quad} \\ 21 \\ \underline{\quad} \\ 21 \end{array}$$

A vissza (ellenőrző) szorzás elvégzése.

A szorzatot most is összehasonlítjuk az osztandóval.

$$\begin{array}{r} 86'1' : 21 = 41 \\ 84 \\ \underline{\quad} \\ 21 \\ \underline{\quad} \\ 21 \\ \underline{\quad} \\ 00 \end{array}$$

A kivonás elvégzése, a maradék megállapítása.

A maradékot most is összehasonlítjuk az osztóval.

Végül a műveletvégzés eredményét szorzással ellenőrizzük.

Felvetődhet, hogy a közismert rövidített algoritmust mikor kezdjük el tanítani. Úgy véljük, hogy akkor, ha az előzőekben ismertetett eljárást biztonságosan és viszonylag gyorsan, kellő tempóban végzi el a tanuló. Megemlítjük, hogy számos ország tanítási gyakorlatában a rövidített eljárás egyáltalán nem szerepel.

A kétjegyű számmal való osztás további fokozatai a következők lehetnek.

- Négyjegyű szám osztása kétjegyű osztóval, az osztandó többszöröse az osztónak, s az első két számjegyéből képzett szám nagyobb az osztónál, a hányadosban nulla nem szerepel
3 798 : 18 =
- Négyjegyű szám osztása kétjegyű osztóval, az osztandó többszöröse az osztónak, s az első két számjegyéből képzett szám kisebb az osztónál, a hányadosban nulla nem szerepel
2 875 : 25 =

- Négyjegyű szám osztása kétjegyű osztóval, az osztandó többszöröse az osztónak, a hányadosban nulla szerepel
 $9\ 246 : 23 =$
- Négyjegyű szám maradékos osztása
 $9\ 345 : 29 =$

Az előzőekben vázlatosan áttekintettük a számolási eljárásokat, a numerikus nehezítés fokozatait, a számolási analógiákat, amelyek tudatos alkalmazása hozzájárulhat az alpműveleti készségek kialakításához és fejlesztéséhez.

Az alpműveletek és a hozzájuk kapcsolódó számolási eljárások tanítása nem csupán a képességfejlesztés feladatainak megvalósítását, hanem a matematikai műveltség megalapozását is elősegíti.